التمرين 1

الفضاء منسوب لمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $A(-1, 0, 1)$ و $B(-4, 1, 0)$ و $C(0, 0, 2)$

وليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيله البارامتري هو :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

1) أ- بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

ب- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2) بين أن (Δ) يقطع المستوى (ABC) في نقطة يجب تحديدها.

حل السؤال الاول :

أ- حدد المحددات المستخرجة المرتبطة بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

لدينا $(-3, 1, -1)$ و $(1, 0, 1)$ هما على التوالي مثلوثا احداثيات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

ومنه فإن المحددات المستخرجة للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هي :

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

وهي تساوي على التوالي 1 - و 2 - و 1 ، وكلها غير منعدمة.

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين وبالتالي فإن النقط A و B و C غير مستقيمية.

ب- أحسب المحددة $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ حيث M نقطة من الفضاء.

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

لدينا

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x+1 & -3 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x + 1 - (-2)y - (z-1)$$

$$= x + 2y - z + 2$$

إذن معادلة المستوى (ABC) هي $x + 2y - z + 2 = 0$

حل السؤال الثاني :

حدد $\vec{u}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) ثم احسب المحددة $\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \vec{u})$

لدينا

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & -3 & -2 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -9x - 3(y-1) + z$$

$$= -9x - 3y + z + 3$$

إذن $-9x - 3y + z + 3 = 0$ أي $9x + 3y - z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P).

ب- بين أن D لا تنتمي الى المستوى (ABC)

لدينا $9x + 3y - z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

ولدينا $9 . 0 + 3 . 0 - 1 - 3 \neq 0$ ومنه $D \notin (ABC)$

إذن النقط A و B و C و D غير مستوائية ومنه فإن المتجهات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مستوائية.

حل السؤال الثاني :

أ- لاحظ أن معادلة (P) تكتب على الشكل $9x + 3y - z + \alpha = 0$

لدينا $9x + 3y - z - 3 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) و (P) يوازي المستوى (ABC)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على الشكل $9x + 3y - z + \alpha = 0$

وبما أن $E(1, 0, 1)$ نقطة من (P) فإن $9 + 3 . 0 - 1 + \alpha = 0$ أي $\alpha = -8$

وبالتالي فإن $9x + 3y - z - 8 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P).

ب- حدد التمثيل البارامتري للمستقيم (BD).

لدينا $(-1, 2, 1)$ هو مثلوث احداثيات المتجهة $\overrightarrow{BD}$

إذن التمثيل البارامتري للمستقيم (BD) هو :

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

لتكن $F(x, y, z)$ نقطة تقاطع (P) و (BD)

لدينا $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ (حيث $\lambda \in \mathbb{R}$) و $9x + 3y - z - 8 = 0$

إذن $9(-\lambda) + 3(2\lambda) - (1 + \lambda) - 8 = 0$ أي $-9\lambda + 6\lambda - 1 - \lambda - 8 = 0$

بمعنى أن $-4\lambda - 9 = 0$ أي $\lambda = -\frac{9}{4}$

ومنه فإن

$$\begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{9}{2} \\ z = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

التمرين 4

الفضاء منسوب لمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $A(2, 2, 2)$ و $B(0, -2, -2)$ و $C(1, 3, 4)$ و $D(1, 0, -3)$

1) أ- حدد نظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (AB)

ب- استنتج أن A و B و C غير مستقيمية.

2) أ- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

ب- استنتج أن النقط A و B و C و D غير مستوائية.

حل السؤال الاول :

أ- حدد المحددات المستخرجة المرتبطة بالمتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ حيث M نقطة من الفضاء.

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

لدينا $(x - 2, y - 2, z - 2)$ و $(-2, -4, -4)$ هما على التوالي مثلوثا احداثيات $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ ومنه فإن المحددات المستخرجة المرتبطة بهما هي :

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ y-2 & -4 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ z-2 & -4 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} y-2 & -4 \\ z-2 & -4 \end{vmatrix}$$

وهي تساوي على التوالي : $-4(x-2) + 2(y-2)$ و $-4(x-2) + 2(z-2)$ و $-4(y-2) + 4(z-2)$

إذن $M \in (AB)$ إذا وفقط إذا كان

$-4(x-2) + 2(y-2) = 0$ و $-4(x-2) + 2(z-2) = 0$ و $-4(y-2) + 4(z-2) = 0$

أي $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4}$ و $\frac{x-2}{2} = \frac{z-2}{4}$ و $y - 2 = z - 2$

وبالتالي فإن نظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (AB) هي $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{4}$

ب- بين أن النقطة C لا تنتمي الى المستقيم (AB).

لدينا $(1, 3, 4)$ هو مثلوث احداثيات C

ولدينا $\frac{1-2}{2} \neq \frac{3-2}{4}$ ومنه فإن $C \notin (AB)$

إذن A و B و C غير مستقيمية.

حل السؤال الثاني :

احسب المحددة $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ حيث M نقطة من الفضاء.

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

لدينا $(x - 2, y - 2, z - 2)$ و $(-2, -4, -4)$ و $(-1, 1, 2)$ هي على التوالي مثلوثات احداثيات المتجهات $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ومنه فإن

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ y-2 & -4 & 1 \\ z-2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} t = \mu \\ -3 + 2t = \mu \\ -1 + t = 3 - \mu \end{cases} \quad (t, \mu) \in \mathbb{R}^2$$ التي تكافئ $$\begin{cases} t = \mu \\ -3 + 2t = t \\ -1 + t = 3 - t \end{cases}$$

أي $\begin{cases} t = \mu \\ t = 3 \\ t = 2 \end{cases}$ وهذا غير ممكن

إذن المستقيمان (D) و (D') غير مستوائيين.

حل السؤال الثاني :

اعتبر $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

* لتكن $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

لدينا $A(1, 1, 1)$ نقطة من المستقيم (Δ) ومنه فإن تمثيله البارامتري هو

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha t \\ y = 1 + \beta t \\ z = 1 + \gamma t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

* المستقيم (Δ) يقطع المستقيم (D) في نقطة $B(x, y, z)$

ومنه فإن $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 1 + \alpha t \\ y = 1 + \beta t \\ z = 1 + \gamma t \end{cases}$

إذن $\begin{cases} 1 + \beta t = 2(1 + \alpha t) - 3 \\ 1 + \gamma t = 1 + \alpha t - 1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} (\beta - 2\alpha) t = -2 \\ (\gamma - \alpha) t = -1 \end{cases}$

أي $t = \dfrac{-2}{\beta - 2\alpha}$ و $t = \dfrac{-1}{\gamma - \alpha}$ ومنه فإن $\dfrac{-1}{\gamma - \alpha} = \dfrac{-2}{\beta - 2\alpha}$

إذن $\beta - 2\alpha = 2(\gamma - \alpha)$ أي $\beta = 2\gamma$

* المستقيم (Δ) يقطع المستقيم (D') في نقطة $B(x, y, z)$

ومنه فإن $\begin{cases} x = y \\ z = -y + 3 \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 1 + \alpha t \\ y = 1 + \beta t \\ z = 1 + \gamma t \end{cases}$

إذن $1 + \alpha t = 1 + \beta t$ و $1 + \gamma t = -1 - \beta t + 3$

أي $(\alpha - \beta) t = 0$ و $(\gamma + \beta) t = 1$ ومنه $(\alpha - \beta) t = 0$ و $t \neq 0$

إذن $\alpha = \beta$

* وبالتالي فإن $\vec{u}\left(\alpha, \alpha, \dfrac{\alpha}{2}\right)$ هي متجهة موجهة للمستقيم (Δ) ولدينا كذلك $\vec{v}\left(1, 1, \dfrac{1}{2}\right)$ متجهة موجهة له.

إذن المستقيم (Δ) يمر من $A(1, 1, 1)$ وموجهة بالمتجهة $\vec{v}\left(1, 1, \dfrac{1}{2}\right)$

ومنه $1 = \mu + 1$ و $-1 = 3 - \lambda$ و $1 - \mu = -3 + 2\lambda$

أي $\mu = 0$ و $\lambda = 4$ و $\mu + 2\lambda = 4$

ومنه $2 . 4 = 4$ وهذا غير ممكن.

إذن $(AB) \cap (CD) = \varnothing$

التمرين 7

الفضاء منسوب لمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر المستقيم (D) المار من $A(-2, 1, -5)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(3, -4, 4)$ وليكن (P) المستوى الذي معادلته الديكارتية هي $4x - 3y - 6z - 5 = 0$

1) حدد تمثيلا بارامتريا للمستوى (P)

2) بين أن (D) يوازي (P).

حل السؤال الاول :

اكتب x بدلالة y و z. انطلاقا من معادلة المستوى (P)

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء. لدينا :

$$\begin{aligned} M \in (P) &\Leftrightarrow 4x - 3y - 6z - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x = 3y + 6z + 5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y + \frac{6}{4}z + \frac{5}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y + \frac{3}{2}z + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

إذن التمثيل البارامتري للمستوى (P) هو :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}t + \frac{3}{2}t' \\ y = t \\ z = t' \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

حل السؤال الثاني :

استنتج من التمثيل البارامتري للمستوى (P) متجهتان موجهتان له

التمثيل البارامتري للمستوى (P) هو :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}t + \frac{3}{2}t' \\ y = 0 + 1 . t + 0 . t' \\ z = 0 + 0 . t + 1 . t' \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

ومنه فإن $\vec{v}\left(\frac{3}{4}, 1, 0\right)$ و $\vec{w}\left(\frac{3}{2}, 0, 1\right)$ هما متجهتان موجهتان للمستوى (P)

لدينا

$$\det(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

حل السؤال الثاني :

حل النظمة التالية : $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (P) \cap (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y - z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

إذن (Δ) يقطع المستوى (P) في النقطة $K(0, 0, -1)$

التمرين 9

الفضاء منسوب للمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر المستوى (P) الذي معادلته $x - y + z = 0$ والمستقيم (Δ) المار من $A(4, 3, 2)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(2, 5, -1)$

1) حدد تقاطع (P) و (Δ)

2) حدد نقطتين M و N من الفضاء بحيث :

- $M \in (\Delta)$ و $N \in (P)$
- $\overrightarrow{MN}$ هو مثلوث احداثيات $(1, 1, 1)$

حل السؤال الاول :

حدد التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ)

لدينا $\vec{u}(2, 5, -1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) و $A(4, 3, 2)$ نقطة منه.

إذن التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) هي :

$$\begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

لتكن $B(\alpha, \beta, \gamma)$ نقطة تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ).

لدينا $\begin{cases} \alpha = 4 + 2\lambda \\ \beta = 3 + 5\lambda \\ \gamma = 2 - \lambda \end{cases}$ و $\alpha - \beta + \gamma = 0$

ومنه $(4 + 2\lambda) - (3 + 5\lambda) + (2 - \lambda) = 0$ أي $3 - 4\lambda = 0$ بمعنى أن $\lambda = \frac{3}{4}$

إذن التمثيل البارامتري للمستقيم (AB) هو

$$\begin{cases} x = 1 + 3 . \lambda \\ y = 1 + (-1)\lambda \\ z = -1 + 0 . \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

حل السؤال الثاني :

احسب المحددة $\det(\overrightarrow{CM}, \vec{u}, \vec{v})$ حيث M نقطة من الفضاء

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء. لدينا :

$$M \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 1 \\ y+2 & 1 & -2 \\ z-2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (y+2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) - 6(y+2) - 7(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6y - 7z = 0$$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي $2x - 6y - 7z = 0$

حل السؤال الثالث :

احسب المحددة $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v})$

* لدينا

$$\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 12$$

ومنه فإن $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0$. إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مستوائية

ومنه فإن (AB) يقطع (P) في نقطة Ω

* ليكن (α, β, γ) مثلوث احداثيات Ω.

لدينا $2\alpha - 6\beta - 7\gamma = 0$ و $\begin{cases} \alpha = 1 + 3\lambda \\ \beta = 1 - \lambda \\ \gamma = -1 \end{cases}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

ومنه $2(1 + 3\lambda) - 6(1 - \lambda) + 7 = 0$ أي $12\lambda + 3 = 0$ أي $\lambda = -\frac{1}{4}$

إذن $\alpha = \frac{1}{4}$ و $\beta = \frac{5}{4}$ و $\gamma = -1$

وبالتالي فإن $\Omega\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -1\right)$ هي نقطة تقاطع (AB) و (P)

لدينا $x - y + z = 0$ و $\begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = -7 + 2t \end{cases}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

ومنه $t - (-2 + t) + (-7 + 2t) = 0$ أي $2t - 5 = 0$ أي $t = \frac{5}{2}$

إذن $x = \frac{5}{2}$ و $y = \frac{1}{2}$ و $z = -2$

وبالتالي فإن $\Omega\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)$ هي نقطة تقاطع (P) و (D)

حل السؤال الثالث :

لاحظ أن (D) يقطع المستوى (P) الذي يوجد ضمنه (Δ)

لدينا (D) يقطع المستوى (P) في النقطة $\Omega\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)$ التي لا تنتمي الى المستقيم (Δ) (تحقق من ذلك) وبما أن (Δ) يوجد ضمن (P) فإن (P) هو المستوى المحدد بالمستقيم (Δ) والنقطة Ω

إذا كان (D) و (Δ) مستوائيان فإن (D) يوجد ضمن (P) وهذا غير ممكن.

إذن المستقيمان (D) و (Δ) غير مستوائيين.

التمرين 12

الفضاء منسوب للمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط التالية A (1, 1, 1) و B (0, 1, 0) و C (-1, 1, 1) وليكن (P) المستوى المار من D (0, 1, 0) والموجة بالمتجهتين $\vec{u}$ (-1, -1, 1) و $\vec{v}$ (-1, 1, 1)

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P)

2) حدد تمثيلا بارامتريا للمستوى (ABC)

3) بين أن المستويين (P) و (ABC) متقاطعان وحدد تقاطعهما.

حل السؤال الاول :

احسب المحددة $\det(\overrightarrow{DM}, \vec{u}, \vec{v})$ حيث M نقطة من الفضاء

لتكن M (x, y, z) نقطة من الفضاء

لدينا (x, y - 1, z) هو مثلوث احداثيات المتجهة $\overrightarrow{DM}$.

$$M \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{DM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x - 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow x + z = 0$$

إذن معادلة المستوى (P) هي $x + z = 0$

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = 4 - 2\alpha - 3\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1-x}{2} \\ \alpha = y + \dfrac{1-x}{2} \\ z = 4 - 2\alpha - 3\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow z = 4 - 2\left(y + \frac{1-x}{2}\right) - 3\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = 4 - 2y - 1 + x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3}{2} - 2y + \frac{5}{2}x$$

$$\Leftrightarrow 5x - 4y - 2z + 3 = 0$$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) هي $5x - 4y - 2z + 3 = 0$

حل السؤال الثاني :

حل النظمة المكونة من معادلتي (P) و (Q)

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (P) \cap (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y - z = 0 \\ 5x - 4y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 4x - 2y \\ 5x - 4y - 8x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 4x - 2y \\ -3x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 4 - 2y \end{cases}$$

إذن (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم تمثيله البارامتري هو

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

التمرين 14

الفضاء منسوب للمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر المستوى (P) الذي معادلته $x - y - 2z - 3 = 0$ والمستوى (Q) المار من النقطة $A(2, -2, 1)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(1, 1, 1)$ و $\vec{v}(2, 4, 0)$.

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q)

2) بين أن (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) محددا تمثيلا بارامتريا له.

3) ليكن (R) المستوى الذي معادلته $x + y + z - 1 = 0$

حدد تقاطع المستويات (P) و (Q) و (R)

حل السؤال الاول :

احسب المحددة $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})$ حيث M نقطة من الفضاء.

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

لدينا $(x - 2, y + 2, z - 1)$ هو مثلوث احداثيات المتجهة $\overrightarrow{AM}$

ولدينا

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y+2 & 1 & 4 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y+2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -4(x-2) + 2(y+2) + 2(z-1)$$

$$= -2(2x - y - z - 5)$$

إذن معادلة المستوى (Q) هي $2x - y - z - 5 = 0$

حل السؤال الثاني :

حدد تقاطع المستويين (P) و (Q)

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء. لدينا

$$M \in (P) \cap (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z - 3 = 0 \\ 2x - y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2z + 3 \\ 2x - y = z + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z + 2 \\ x - y = 2z + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z + 2 \\ y = -3z - 1 \end{cases}$$

إذن المستويان (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) الذي تمثيله البارامتري هو :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

حل السؤال الثالث :

حدد تقاطع (Δ) والمستوى (R)

لدينا (Δ) هو تقاطع المستويين (P) و (Q) ومنه فإن تقاطع المستويات (P) و (Q) و (R) هو تقاطع (Δ) و (R).

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من (Δ) و (R)

لدينا $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in \mathbb{R}$ (أنظر السؤال السابق)

وبما أن $x + y + z - 1 = 0$ فإن $(2 - t) + (-1 - 3t) + t - 1 = 0$

أي $-3t = 0$ أي $t = 0$ ومنه فإن $x = 2$ و $y = -1$ و $z = 0$

إذن $\Omega(2, -1, 0)$ هي نقطة تقاطع المستويات (P) و (Q) و (R).

ومنه فإن $\det(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \frac{3}{2}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$

$$= \frac{3}{2} \cdot 4 + \left(\frac{3}{4} \cdot (-4) - 3\right)$$

$$= 0$$

إذن (D) يوازي المستوى (P)

التمرين 8

الفضاء منسوب للمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقطتين $I(1, 0, 0)$ و $J(0, 1, 0)$ وليكن (P) المستوى المار من I والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(1, 0, 1)$ و $\vec{v}(1, -1, -1)$ و (Δ) المستقيم المار من J والموجه بالمتجهة $\vec{w}(0, 1, 1)$

1) أ- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P).

ب- حدد نظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ)

2) بين أن (Δ) يقطع المستوى (P) في نقطة يجب تحديدها.

حل السؤال الاول :

أ- احسب المحددة $\det(\overrightarrow{IM}, \vec{u}, \vec{v})$ حيث M نقطة من الفضاء

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

لدينا $(x - 1, y, z)$ هو مثلوث احداثيات المتجهة $\overrightarrow{IM}$

لدينا $\det(\overrightarrow{IM}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 0 & -1 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (x - 1) + 2y - z$$

$$= x + 2y - z - 1$$

إذن معادلة المستوى (P) هي $x + 2y - z - 1 = 0$

ب- حدد المحددات المستخرجة المرتبطة بالمتجهتين $\overrightarrow{JM}$ و $\vec{w}$ حيث M نقطة من الفضاء.

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء

لدينا $(x, y - 1, z)$ هو مثلوث احداثيات المتجهة $\overrightarrow{JM}$

$(0, 1, 1)$ هو مثلوث احداثيات المتجهة $\vec{w}$

ومنه فإن المحددات المستخرجة المرتبطة بالمتجهتين $\overrightarrow{JM}$ و $\vec{w}$ هي

$$\begin{vmatrix} x & 0 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} x & 0 \\ z & 1 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} y-1 & 1 \\ z & 1 \end{vmatrix}$$

وهي تساوي على التوالي x و x و $y - z - 1$

إذن نظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ) هي : $\begin{cases} x = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$

إذن $\alpha = 4 + 2 . \frac{3}{4}$ و $\beta = 3 + \frac{15}{4}$ و $\gamma = 2 - \frac{3}{4}$

$= \frac{11}{2}$ $\quad = \frac{27}{4}$ $\quad = \frac{5}{4}$

ومنه فإن $B\left(\frac{11}{2}, \frac{27}{4}, \frac{5}{4}\right)$ هي نقطة تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ).

حل السؤال الثاني :

اعتبر (a, b, c) و (a', b', c') مثلوثي احداثيات M و N على التوالي

لدينا $M(a, b, c)$ نقطة من المستقيم (Δ) ومنه فإن

$$\begin{cases} a = 4 + 2\lambda \\ b = 3 + 5\lambda \\ c = 2 - \lambda \end{cases}$$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ (أنظر حل السؤال الاول)

ولدينا $N(a', b', c')$ نقطة من المستوى (P) ومنه فإن $a' - b' + c' = 0$

ولدينا $(a' - a, b' - b, c' - c)$ هو مثلوث احداثيات $\overrightarrow{MN}$.

ومنه $a' - a = 1$ و $b' - b = 1$ و $c' - c = 1$

أي $a = a' - 1$ و $b = b' - 1$ و $c = c' - 1$

ومنه $a - b + c = a' - b' + c' - 1$

وبما أن $a' - b' + c' = 0$ فإن $a - b + c = 1$

أي $(4 + 2\lambda) - (3 + 5\lambda) + (2 - \lambda) = 1$ بمعنى أن $-4\lambda = -2$ أي $\lambda = \frac{1}{2}$

ومنه فإن $a = 5$ و $b = \frac{11}{2}$ و $c = \frac{3}{2}$

$a' = 6$ و $b' = \frac{13}{2}$ و $c' = \frac{5}{2}$

إذن $M\left(5, \frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$ و $N\left(6, \frac{13}{2}, \frac{5}{2}\right)$ هما النقطتان بحيث $M \in (\Delta)$ و $N \in (P)$ و $(1, 1, 1)$ هو مثلوث احداثيات $\overrightarrow{MN}$.

التمرين 10

الفضاء منسوب للمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(1, 1, -1)$ و $B(4, 0, -1)$

ليكن (P) المستوى المار من $C(1, -2, 2)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(3, 1, 0)$ و $\vec{v}(1, -2, 2)$

1) اكتب تمثيلا بارامتريا للمستقيم (AB).

2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P)

3) بين أن (AB) و (P) متقاطعان وحدد نقطة تقاطعهما.

حل السؤال الاول :

حدد احداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$

لدينا $(4 - 1, 0 - 1, -1 + 1)$ أي $(3, -1, 0)$ هو مثلوث احداثيات $\overrightarrow{AB}$

التمرين 11

الفضاء منسوب للمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر المستقيمين (D) و (Δ) المعرفين على التوالي بما يلي :

$$(D) \ : \ x - 4 = y - 2 = \frac{z - 1}{2}$$

$$(\Delta) \ : \ \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{3} = z - 1$$

وليكن (P) المستوى الذي معادلته $x - y + z = 0$

1) بين أن (Δ) يوجد ضمن المستوى (P).

2) أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

ب- حدد نقطة تقاطع المستوى (P) والمستقيم (D)

3) استنتج أن (Δ) و (D) غير مستوائيين.

حل السؤال الاول :

اعتبر نقطة $M(x, y, z)$ من المستقيم (Δ) وبين أن $x - y + z = 0$

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستقيم (Δ)

لدينا $\frac{x}{2} = \frac{y - 1}{3} = z - 1$ ومنه $x = 2z - 2$ و $y = 3z - 2$

إذن $x - y + z = (2z - 2) - (3z - 2) + z$

$= 0$

ومنه $M \in (P)$

وبالتالي فإن $(\Delta) \subset (P)$

حل السؤال الثاني :

أ- اكتب z و y بدلالة x انطلاقا من معادلتي المستقيم (D).

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (D) \Leftrightarrow x - 4 = y - 2 = \frac{z - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ z - 1 = 2x - 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ z = 2x - 7 \end{cases}$$

إذن التمثيل البارامتري للمستقيم (D) هو :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = -7 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- اعتبر $M(x, y, z)$ نقطة من (P) و (D)

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة تنتمي الى (P) و (D)

حل السؤال الثاني :

حدد احداثيات المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

لدينا $(-1, 0, -1)$ و $(-2, 0, 0)$ هما على التوالي مثلوثا احداثيات المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

إذن التمثيل البارامتري للمستوى (ABC) هو :

$$\begin{cases} x = -1 - a - 2b \\ y = 1 \\ z = 1 - a \end{cases} \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

حل السؤال الثالث :

حدد تقاطع المستويين (P) و (ABC)

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (P) \cap (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x = -1 - a - 2b \\ y = 1 \\ z = 1 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - a - 2b \\ z = 1 - a \\ y = 1 \\ -2a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - a + 2a \\ z = 1 - a \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + a \\ y = 1 \\ z = 1 - a \end{cases}$$

إذن تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم المار من C والموجه بالمتجهة $\vec{w}(1, 0, -1)$

التمرين 13

الفضاء منسوب للمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر (P) المستوى الذي معادلته $4x - 2y - z = 0$ و (Q) المستوى المعرف بالتمثيل البارامتري التالي :

$$\begin{cases} x = 1 - 2\beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = 4 - 2\alpha - 3\beta \end{cases} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q)

2) بين أن (P) و (Q) متقاطعان محددا تمثيلا بارامتريا لتقاطعهما.

حل السؤال الاول :

أوجد علاقة بين x و y و z غير مرتبطة بالبارامترين α و β.

ومنه فإن
$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -4(x-2) + 8(y-2) - 6(z-2)$$
$$= -4x + 8y - 6z + 8 - 16 + 12$$
$$= -2(2x - 4y + 3z - 2)$$

إذن معادلة المستوى (ABC) هي $2x - 4y + 3z - 2 = 0$

ب- بين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوى (ABC)

لدينا $(1, 0, -3)$ هو مثلوث احداثيات D

لدينا $2x - 4y + 3z - 2 = 0$ هي معادلة المستوى (ABC)

ولدينا $2 \times 1 - 4 \times 0 + 3(-3) - 2 \neq 0$ ومنه فإن $D \notin (ABC)$

وهذا يعني أن النقط A و B و C و D غير مستوائية.

التمرين 5

الفضاء منسوب لمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقطة $A(1, 1, 1)$ والمستقيمين (D) و (D') المعرفين بما يلي :

$$(D) : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = x - 1 \end{cases} \qquad (D') : \begin{cases} x = y \\ z = -y + 3 \end{cases}$$

1) بين أن المستقيمين (D) و (D') غير مستوائيين

2) حدد المستقيم (Δ) المار من A والذي يقطع المستقيمين (D) و (D')

حل السؤال الاول :

حدد متجهة موجهة لكل من المستقيمين (D) و (D').

التمثيل البارامتري للمستقيم (D) هو :
$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ومنه فإن $\vec{u}(1, 2, 1)$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

التمثيل البارامتري للمستقيم (D') هو :
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

ومنه فإن $\vec{v}(1, 1, -1)$ متجهة موجهة للمستقيم (D')

المحددات المستخرجة المرتبطة بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هي

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

وهي تساوي على التوالي 1 - و 2 - و 3 - وكلها غير منعدمة

إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين.

ومنه فإن المستقيمين (D) و (D') غير متوازيين.

إذا كان (D) و (D') متقاطعين فإن للنظمة التالية حلا وحيدا

وبالتالي فإن $F\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ هي نقطة تقاطع (P) و (BD).

التمرين 3

الفضاء منسوب للمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر المستقيمين المعرفين بما يلي :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = -2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad (D) : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1) بين أن (Δ) يوازي قطعا (D)

2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى المحدد بالمستقيمين (Δ) و (D)

حل السؤال الاول :

حدد متجهة موجهة لكل من المستقيمين (Δ) و (D)

* من التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) نستنتج أن $\vec{u}(3, 2, -2)$ متجهة موجهة له ولدينا كذلك $\vec{v}(3, 2, -2)$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

نلاحظ أن $\vec{u} = \vec{v}$ ومنه فإن (Δ) // (D)

* لدينا $A(2, 3, -2)$ نقطة تنتمي الى المستقيم (Δ)

إذا كانت $A \in (D)$ فإن $2 = 3 + 3t$ و $3 = 2t$ أي $t = -\frac{1}{3}$ و $t = \frac{3}{2}$

وهذا غير ممكن ومنه فإن $A \notin (D)$

* لدينا إذن (Δ) // (D) و $A \in (D)$ و $A \notin (D)$

ومنه فإن (Δ) يوازي قطعا (D).

حل السؤال الثاني :

اعتبر نقطتين A و B بحيث $A \in (\Delta)$ و $B \in (D)$ و $\vec{u}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

لدينا $A(2, 3, -2)$ نقطة من المستقيم (Δ) و $B(3, 0, 4)$ نقطة من المستقيم (D)

و $\vec{u}(3, 2, -2)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) و (D).

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء. لدينا

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y-3 & -3 & 2 \\ z+2 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -6(x-2) + 20(y-3) + 11(z+2)$$

$$= -6x + 20y + 11z + 12 - 60 + 22$$

$$= -6x + 20y + 11z - 26$$

إذن معادلة المستوى المحدد بالمستقيمين (Δ) و (D) هي $-6x + 20y + 11z - 26 = 0$

* من التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) نستنتج أن $\vec{u}\,(1, 2, -2)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ).

لدينا
$$\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -7$$

ومنه فإن $\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \vec{u}) \neq 0$

إذن المستقيم (Δ) يقطع المستوى (ABC) في نقطة D.

* ليكن (α, β, γ) مثلوث احداثيات D

لدينا $\begin{cases} \alpha = 1 + t \\ \beta = 1 + 2t \\ \gamma = 3 - 2t \end{cases}$ و $\alpha + 2\beta - \gamma + 2 = 0$

ومنه فإن $(1 + t) + 2(1 + 2t) - (3 - 2t) + 2 = 0$ أي $7t + 2 = 0$ بمعنى أن $t = -\frac{2}{7}$

إذن $\alpha = 1 - \frac{2}{7}$ و $\beta = 1 - \frac{4}{7}$ و $\gamma = 3 + \frac{4}{7}$

أي $\alpha = \frac{5}{7}$ و $\beta = \frac{3}{7}$ و $\gamma = \frac{25}{7}$

وبالتالي فإن $D\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{25}{7}\right)$ هي نقطة تقاطع (ABC) و (Δ).

التمرين 2

الفضاء منسوب لمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $A(0, 1, 0)$ و $B(1, -2, 0)$ و $C(1, -1, 3)$ و $D(0, 0, 1)$

1) أ- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

ب- استنتج أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مستوائية

2) ليكن (P) المستوى المار من $E(1, 0, 1)$ والموازي للمستوى (ABC)

أ- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P)

ب- حدد تقاطع المستوى (P) والمستقيم (BD).

حل السؤال الاول :

أ- أحسب المحددة $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ حيث M نقطة من الفضاء.

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

لدينا $(x, y - 1, z)$ هو مثلوث احداثيات المتجهة $\overrightarrow{AM}$

$(1, -3, 0)$ هو مثلوث احداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$

$(1, -2, 3)$ هو مثلوث احداثيات المتجهة $\overrightarrow{AC}$